CENGAGE Learning™

Matemáticas financieras

5a. edición

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

5a. edición

HÉCTOR MANUEL
VIDAURRI AGUIRRE

REVISIÓN TÉCNICA
IRMA DAMIÁN GONZÁLEZ
PROFESORA ASOCIADA
DEPARTAMENTO DE CONTABILIDAD Y NEGOCIOS INTERNACIONALES
TECNOLÓGICO DE MONTERREY, CAMPUS TOLUCA

CENGAGE
Learning™

Argentina • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Matemáticas financieras,
Quinta edición
Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Gerente editorial para Latinoamérica:
Patricia La Rosa

Gerente de procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Javier Reyes Martínez
Omar A. Ramírez Rosas

Diseño de portada:
Mariana Sierra Enríquez

Composición tipográfica:
Mariana Sierra Enríquez

Imagen de portada:
© Mailthepic | Dreamstime.com
© Andreblais | Dreamstime.com
© Cornelius2... | Dreamstime.com
© Pressmaste... | Dreamstime.com

Datos para catalogación bibliográfica:
Vidaurri Aguirre, Héctor Manuel
Matemáticas financieras, Quinta edición
ISBN: 978-607-481-715-7

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

Acerca del autor

Héctor Manuel Vidaurri Aguirre

Actualmente es profesor del Departamento de Matemáticas y Física del *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente* (ITESO), en Guadalajara, Jalisco.

Estudió la carrera de Ingeniería Química en la Universidad de Guadalajara; ha trabajado en la industria privada y, como profesor universitario, tiene alrededor de 28 años de experiencia docente, durante los cuales ha impartido las materias de matemáticas financieras, álgebra superior, cálculo diferencial e integral e ingeniería económica en diversas universidades de la ciudad de Guadalajara.

Fue instructor externo de Banca Serfín en las materias de matemáticas financieras y finanzas; es autor de una serie de artículos sobre matemáticas financieras aplicadas publicados en el periódico *Mural*, de Guadalajara, Jalisco.

Contenido

Prefacio

El ayer es un cheque cancelado;
el mañana un pagaré sin fecha;
el hoy es nuestro único efectivo,
por lo tanto, gastémoslo inteligentemente.

Kay Lyoms

Este libro es útil para estudiantes de bachillerato y licenciatura en las áreas de finanzas, ingeniería financiera, economía, contaduría, banca, administración de empresas, actuaría y como auxiliar en los cursos de ingeniería económica y evaluación de proyectos de inversión. Asimismo, es útil como referencia para estudiantes de posgrado en las áreas mencionadas.

El libro puede utilizarlo para el estudio individual toda persona interesada en los fundamentos de la matemática financiera, como empresarios, banqueros y profesionales que deseen aprender o repasar estos temas.

La matemática financiera se ha convertido en una disciplina fundamental, tanto a nivel personal como profesional, ya que proporciona los conceptos y las herramientas necesarias para entender y manejar el valor del dinero en el tiempo, y con ello comprender los aspectos financieros y comerciales del mundo moderno.

La matemática financiera, también llamada *matemática de las operaciones financieras*, es una parte de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero, llamadas *capitales*. Sobre los inicios de la matemática financiera no se sabe gran cosa, simplemente que ésta ha existido desde tiempo inmemorial. La aritmética comercial estaba bien desarrollada para el 1500 a.C., y parece ser que la matemática financiera se desarrolló como un complemento de las transacciones comerciales. Sin embargo, no se conoce cuándo y quién introduce los conceptos fundamentales en los que se basa. Por ejemplo, del concepto de interés simplemente sabemos que surgió cuando una persona se dio cuenta que si alguien le debía dinero, él debía recibir una compensación por el tiempo que esta persona tardara en cancelar la deuda.

La importancia de la matemática financiera radica en su aplicación a las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas de las finanzas, ya que permite una adecuada toma de decisiones en estos campos. Asimismo, es la base de casi todo análisis de proyectos de inversión, ya que siempre es necesario considerar el efecto del interés que opera en las cantidades de efectivo con el tiempo.

En esta quinta edición se mantiene la estructura general del libro. Sin embargo, se ha llevado a cabo una revisión completa de todos los capítulos; se han escrito nuevas secciones, reescrito otras y se han actualizado temas, ejemplos y ejercicios. Asimismo, hay nuevos ejemplos, ejercicios y ejercicios especiales, así como temas especiales.

Características de la quinta edición

- El capítulo 3 "Sucesiones y series" fue ampliado para incluir las sucesiones geométricas infinitas.
- Al final de cada capítulo hay un Examen de capítulo.
- Se revisaron y actualizaron todos los temas especiales y se agregaron nuevos: *Los logaritmos en la música*, *Pago mínimo en tarjeta de crédito*, *El costo anual total* (CAT) y *La fórmula de Baily.*
- La mayoría de las fórmulas utilizadas en el texto son demostradas. Esto tiene como objetivo que el lector entienda el fundamento y el alcance de las fórmulas, así como evitar que las vean como algo que aparece como por arte de magia.
- En algunas secciones se dan referencias adicionales de sitios web que el lector puede visitar para complementar lo mencionado en el texto.
- Se amplió el uso de la calculadora financiera HP 17bII+
- Uso básico de la hoja de cálculo Excel y de sus funciones financieras incorporadas.
- Al final del libro se presentan las soluciones de todos los ejercicios propuestos, así como un formulario que incluye todas las fórmulas que aparecen en el libro, divididas en capítulos.

CAPÍTULO

5

Interés compuesto e inflación

Si quieres saber el valor del dinero,
prueba a pedirlo prestado.
Benjamín Franklin (1706-1790)
FÍSICO, FILÓSOFO Y POLÍTICO
NORTEAMERICANO

Objetivos

Al concluir el estudio de este capítulo, usted podrá:

- Distinguir entre interés simple e interés compuesto.
- Conocer los conceptos de periodo de capitalización y tasa de interés capitalizable.
- Resolver problemas relativos al interés compuesto.
- Distinguir entre tasas de interés nominal, efectiva y equivalente.
- Plantear y resolver problemas donde se utilicen ecuaciones de valor a interés compuesto.
- Explicar qué es la inflación y resolver problemas relacionados con ella.
- Resolver problemas de interés compuesto e inflación utilizando la calculadora financiera y Excel.

5.1 Interés compuesto

En el interés simple el capital que genera el interés permanece constante todo el tiempo que dura el préstamo. En cambio, en el interés compuesto el interés generado en un periodo dado se convierte en capital para el siguiente periodo. Esto es, el interés simple generado al final del primer periodo se suma al capital original, formándose un nuevo capital. Con este nuevo capital se calcula el interés simple generado en el segundo periodo y el interés se suma al capital y así sucesivamente. La suma total obtenida al final del proceso se conoce como **monto compuesto** o **valor futuro**. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le llama **interés compuesto**; esto es:

$$I = F - P \tag{5.1}$$

en donde I representa el interés compuesto; F, el monto compuesto y P, el capital original.

El interés compuesto se puede definir como la operación financiera en la que el capital aumenta al final de cada periodo por adición de los intereses vencidos.

El periodo convenido para convertir el interés en capital se llama **periodo de capitalización** o **periodo de conversión**. Así por ejemplo, la expresión *periodo de capitalización semestral* (o *periodo de conversión semestral*) significa que el interés ganado por un cierto capital se capitaliza, es decir, se suma al capital al término de cada semestre. De igual forma, al hablar de un periodo de capitalización mensual, se está indicando que al final de cada mes se capitaliza (se suma al capital) el interés ganado en el mes. El periodo de capitalización se define como el intervalo de tiempo al final del cual se capitalizan los intereses generados en dicho intervalo.

El interés puede capitalizarse anual, semestral, mensual o semanalmente entre otros. El número de veces que el interés se capitaliza en un año se conoce como **frecuencia de capitalización** o **frecuencia de conversión**. Así, la frecuencia de capitalización para una inversión con capitalización de intereses cada mes es 12; si la capitalización de los intereses es bimestral, la frecuencia de capitalización es 6 y si los intereses se capitalizan trimestralmente, la frecuencia de capitalización es 4.

En la página siguiente se presenta una tabla que muestra las frecuencias de capitalización más comunes.

En todo problema de interés compuesto, al dar la tasa de interés se debe mencionar en seguida el periodo de capitalización. Por ejemplo:

24% anual capitalizable cada semestre
33% capitalizable mensualmente[25]

[25] Con base en lo mencionado en el capítulo 4, se entiende que se trata de una tasa de interés anual con capitalización de intereses mensual.

1.45% mensual capitalizable cada mes
12.3% trimestral con capitalización quincenal
28% convertible cada mes[26]

Si los intereses se capitalizan cada	La frecuencia de capitalización es
Año	1
Semestre	2
Cuatrimestre	3
Trimestre	4
Bimestre	6
Mes	12
Quincena	24
Semana	52
Día	365

El periodo de capitalización es un dato indispensable en los problemas de interés compuesto. Al efectuar un cálculo de interés compuesto es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el periodo de capitalización; es decir, la tasa debe convertirse a **tasa de interés por periodo de capitalización**. Por ejemplo, si en un problema la tasa de interés es de 36% anual capitalizable cada mes, entonces, a fin de realizar los cálculos, ésta se convertirá en tasa mensual:

$$\frac{36\%}{12} = 3\% \text{ mensual capitalizable cada mes}$$

Otro ejemplo: si el problema marca una tasa de 1.5% quincenal capitalizable cada bimestre, entonces la tasa deberá convertirse a tasa bimestral:

$$(1.5)(4) = 6\% \text{ bimestral capitalizable cada bimestre.}$$[27]

Ejemplo 5.1

Tomás invierte $500 000 al 15% anual capitalizable cada mes, a un plazo de 6 meses. Calcule:

a) El monto compuesto al final de los 6 meses.
b) El interés compuesto ganado.
c) Compare el monto compuesto con el monto simple.

[26] Ésta es otra forma de indicar la capitalización de los intereses. El 28% es anual y los intereses se capitalizan cada mes.
[27] Se multiplica por cuatro porque un bimestre consta de cuatro quincenas.

Solución

a) Como el periodo de capitalización es mensual, es necesario convertir la tasa de interés anual a tasa de interés mensual:

$$i = \frac{15}{12} = 1.25\% \text{ mensual} = 0.0125 \text{ por mes.}$$

Capital original	\$500 000.00
Interés del primer mes = (500 000)(0.0125)(1) =	\$6 250.00
Monto al final del primer mes	\$506 250.00

El monto obtenido en el primer mes se convierte en capital al inicio del segundo mes. Con este nuevo capital se calcula el interés del segundo mes:

Capital	\$506 250.00
Interés del segundo mes = (506 250) (0.0125) (1) =	\$6 328.13
Monto al final del segundo mes	\$512 578.13

El monto obtenido en el segundo mes se convierte en capital al inicio del tercer mes. Con este nuevo capital se calcula el interés del tercer mes:

Capital	\$512 578.13
Interés del tercer mes = (512 578.13) (0.0125) (1) =	\$6 407.23
Monto al final del tercer mes	\$518 985.36

El monto obtenido en el tercer mes se convierte en capital al inicio del cuarto mes. Con este nuevo capital se calcula el interés del cuarto mes, y así sucesivamente:

Capital	\$518 985.36
Interés del cuarto mes = (518 985.36) (0.0125) (1) =	\$6 487.32
Monto al final del cuarto mes	\$525 472.68
Capital	\$525 472.68
Interés del quinto mes = (525 472.68) (0.0125) (1) =	\$6 568.41
Monto al final del quinto mes	\$532 041.09
Capital	\$532 041.09
Interés del sexto mes = (532 041.09) (0.0125) (1) =	\$6 650.51
Monto al final del sexto mes	\$538 691.60

El monto compuesto obtenido al final de los 6 meses es de \$538 691.60.

El cálculo anterior se puede expresar en forma tabular de la siguiente forma:

Mes	Capital al inicio del mes	Interés ganado en el mes	Monto compuesto al final del mes
1	\$500 000.00	\$6 250.00	\$506 250.00
2	\$506 250.00	\$6 328.13	\$512 578.13
3	\$512 578.13	\$6 407.23	\$518 985.36
4	\$518 985.36	\$6 487.32	\$525 472.68
5	\$525 472.68	\$6 568.41	\$532 041.09
6	\$532 041.09	\$6 650.51	\$538 691.60

La tabla anterior recibe el nombre de **tabla de capitalización**.

b) El interés compuesto de la inversión se obtiene usando la ecuación (5.1)

$$I = 538\,691.60 - 500\,000 = \$38\,691.60$$

c) Si la inversión hubiera sido con interés simple, el monto obtenido sería:

$$F = 500\,000\,[1 + (0.0125)(6)] = \$537\,500$$

Al comparar los dos montos, se observa que el interés compuesto es mayor que el interés simple. Esto se debe a que en el interés compuesto se ganan intereses sobre los intereses capitalizados. Debido a la capitalización de los intereses, el monto compuesto crece en forma geométrica, mientras que el monto simple crece en forma aritmética.

El ejemplo 5.1 mostró la forma en que se puede calcular el monto compuesto utilizando la fórmula del interés simple. Esta forma de calcular el monto compuesto es laboriosa y tardada. Imagine el tiempo que tardaría en calcular el monto compuesto si el plazo de inversión fuera de 5 años (¡60 periodos de capitalización!). A fin de abreviar, a continuación se deduce una fórmula que permitirá obtener el monto compuesto de manera directa.

Sea P un capital invertido a la tasa de interés compuesto i por periodo de capitalización. Se desea obtener el monto compuesto F al cabo de n periodos de capitalización.

Número de periodo de capitalización	Capital al inicio del periodo	Interés ganado en el periodo	Monto compuesto al final del periodo
1	P	Pi	$P + Pi = P(1 + i)$
2	$P(1 + i)$	$P(1 + i)\,i$	$P(1 + i) + P(1 + i)\,i$ $= P(1 + i)\,[1 + i]$ $= P(1 + i)^2$
3	$P(1 + i)^2$	$P(1 + i)^2\,i$	$P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2\,i$ $= P(1 + i)^2\,[1 + i]$ $= P(1 + i)^3$
4	$P(1 + i)^3$	$P(1 + i)^3\,i$	$P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3\,i$ $= P(1 + i)^3\,[1 + i]$ $= P(1 + i)^4$

De la tabla anterior se observa que el monto compuesto al final del primer periodo es $P(1 + i)$; el monto compuesto al final del segundo periodo es $P(1 + i)^2$; el monto compuesto al final del tercer periodo es $P(1 + i)^3$, y así sucesivamente, de tal forma que al final de n periodos de capitalización el monto compuesto lo da:

$$F = P\,(1 + i)^n \qquad (5.2)$$

en donde F es el monto compuesto o valor futuro de un capital original P, i es la tasa de interés por periodo de capitalización (expresada en forma decimal) y n es el número total de periodos de capitalización.

Ejemplo 5.2

Determine el monto compuesto y el interés compuesto después de 10 años, si se invierten $250 000 a una tasa de 16% con capitalización trimestral.

Solución

La tasa de interés dada es anual y el periodo de capitalización trimestral. Por tanto, la tasa de interés por periodo de capitalización es:

$$i = \frac{16}{4} = 4\% \text{ trimestral capitalizable cada trimestre.}$$

El tiempo de inversión es de 10 años, esto es, 40 trimestres, ya que un año consta de 4 trimestres. Por tanto, hay 40 periodos de capitalización.

Al sustituir los valores numéricos en la ecuación (5.2) se obtiene

$$F = 250\,000\,(1 + 0.04)^{40} = 250\,000\,(1.04)^{40}$$

La expresión anterior se puede evaluar utilizando logaritmos o, de manera directa, mediante una calculadora científica, financiera o graficadora.

$$F = \$1\,200\,255.16$$

El interés compuesto obtenido es:

$$I = \$1\,200\,255.16 - 250\,000 = \$950\,255.16$$

Ejemplo 5.3

¿Qué cantidad de dinero se habrá acumulado al cabo de 5 años si se invierten $75 000 al 1.12% mensual con intereses capitalizables cada bimestre?

Solución

La tasa de interés es de 1.12% mensual, pero pagadera cada bimestre; por tanto, se paga 2.24% en cada periodo bimestral.

Como el tiempo total de inversión es de 5 años, el número total de periodos de capitalización (n) será de 30 bimestres, ya que cada año consta de 6 bimestres.

Al sustituir los datos en la fórmula (5.2) se obtiene:

$$F = 75\,000\,(1 + 0.0224)^{30}$$

$$F = \$145\,776.15$$

Ejemplo 5.4

¿Qué interés producirá un capital de $50 000 invertido al 15% anual compuesto cada 28 días en 2 años? Utilice el año natural.

Solución

La frase *compuesto cada 28 días* significa *capitalizable cada 28 días*. La tasa de interés por periodo de capitalización se obtiene de la siguiente forma:

Un año tiene $\frac{365}{28} = 13.03571429$ periodos de 28 días. Por tanto, la tasa de interés por periodo de capitalización será:

$$\frac{15\%}{13.03571429} = 1.150684931\% \text{ por periodo (de 28 días).}$$

En 2 años de inversión se tendrán $(2)(13.03571429) = 26.07142858$ periodos de capitalización.

Al sustituir los datos en la ecuación 5.2 se obtiene:

$$F = 50\,000\,(1 + 0.01150684931)^{26.07142858}$$

$$F = \$67\,377.43$$

Por tanto:

$$I = 67\,377.43 - 50\,000 = \$17\,377.43$$

Ejemplo 5.5

Si el costo de la energía eléctrica aumentará a un ritmo de 1.2% mensual durante los próximos 12 meses, ¿de cuánto será el aumento total expresado en porcentaje?

Solución

Para resolver el problema se debe conocer, o bien, suponer el costo actual de la energía eléctrica. Suponga que en este momento el kilowatt-hora tiene un costo de \$2.00. Por tanto, el costo al cabo de un año será:

$$F = 2\,(1 + 0.012)^{12} = \$2.3078$$

El incremento de la energía eléctrica en el año será de $2.3078 - 2.00 = \$0.3078$. Si x representa el porcentaje total de aumento, entonces:

Para un repaso sobre porcentajes, vea el capítulo 2, sección 2.2.

$$(2)(x) = 0.3078$$

$$x = 0.1539 = 15.39\% \text{ de incremento en el año.}$$

Usted puede verificar fácilmente que el incremento total en el año no se obtiene mediante la multiplicación de 1.2% por 12, como posiblemente podría haberse pensado. ¿Usted puede explicar por qué?

Ejemplo 5.6

Se invirtieron $200 000 en un banco por 5 años. Cuando se realizó el depósito, el banco pagaba 16.8% capitalizable cada trimestre. Tres años y medio después, la tasa cambió a 14% capitalizable cada mes. Calcule el monto al finalizar los cinco años.

Solución

Se calcula el monto F_1 que se obtiene en los primeros 3.5 años (14 trimestres), cuando la tasa de interés es de 16.8% anual con capitalización trimestral:

$$F_1 = 200\,000\left(1+\frac{0.168}{4}\right)^{14} = \$355\,777.16$$

El monto final F se obtiene al considerar que F_1 ($355 777.16) es el capital que se invierte por un año y medio (18 meses) a la tasa de 14% capitalizable cada mes:

$$F = 355\,777.16\left(1+\frac{0.14}{12}\right)^{18} = \$438\,381.27$$

El monto F se puede obtener al combinar los resultados anteriores:

$$F = 200\,000\left(1+\frac{0.168}{4}\right)^{14}\left(1+\frac{0.14}{12}\right)^{18} = \$438\,381.27$$

Ejemplo 5.7

El 1 de abril de 2007 se efectuó un depósito de $18 000 en un banco que pagaba 20% de interés capitalizable cada mes. El 1 de octubre de 2008 se depositaron $31 000 en la cuenta y ese mismo día la tasa de interés cambió a 15% capitalizable cada quincena. ¿Cuál fue el saldo el 1 de noviembre de 2010, si la tasa de interés volvió a cambiar el 1 de enero de 2010 a 9% capitalizable cada mes?

Solución

En primer lugar se obtiene el monto F_1 al 1 de octubre de 2008. Del 1 de abril de 2007 al 1 de octubre de 2008 hay 18 meses; por tanto, $n = 18$.

$$F_1 = 18\,000\left(1+\frac{0.20}{12}\right)^{18} = \$24\,237.4557$$

El monto compuesto el 1 de octubre de 2008 fue de $24 237.4557. Como ese día se realizó un depósito de $31 000, el saldo es de $55 237.4557. Este saldo es el capital a utilizar para obtener el monto F_2 al 1 de enero de 2010.

Puesto que la capitalización de los intereses del 1 de octubre de 2008 al 1 de enero de 2010 es quincenal, se tiene que $n = 30$ quincenas. Por tanto,

$$F_2 = 55\,237.4557\left(1 + \frac{0.15}{24}\right)^{30} = \$66\,590.22273$$

Para el 1 de enero de 2010, el monto fue de \$66 590.22273. Ese día la tasa de interés cambia, tanto en valor numérico como en frecuencia de capitalización. Del 1 de enero al 1 de noviembre de 2010 hay 10 meses, por tanto, $n = 10$. El monto final F al 1 de noviembre de 2010 es

$$F = 66\,590.22273\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{10} = \$71\,756.46$$

El **valor presente** o **valor actual** de una cantidad de dinero a interés compuesto tiene un significado igual al del interés simple. Esto es, el valor presente de un monto F que vence en fecha futura es la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada, producirá el monto F después de un cierto número de periodos de capitalización.

El concepto de valor presente es uno de los más útiles en la matemática financiera, ya que permite obtener el valor que tiene en el momento actual un conjunto de cantidades que han de vencer en el futuro.

Para calcular el valor presente de un monto compuesto conocido se despeja P de la ecuación (5.2).

Ejemplo 5.8

¿Cuál es el valor presente de \$60 000 que vencen dentro de 2 años, si la tasa de interés es de 34% y los intereses se capitalizan cada bimestre?

Solución

La tasa de interés es de 34% anual, es decir, $\frac{34}{6}\%$ bimestral. Si en dos años hay 12 bimestres, el número total de capitalizaciones será 12.

Al despejar P de la ecuación (5.2) y sustituir los valores numéricos se obtiene:

$$VP = P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{60\,000}{\left(1 + \frac{0.34}{6}\right)^{12}} = 60\,000\left(1 + \frac{0.34}{6}\right)^{-12}$$

$$P = \$30\,966.72$$

Según las leyes de los exponentes, la fórmula también se puede expresar como $P = F(1+i)^{-n}$

Al invertir \$30 966.72 en este momento, al cabo de 2 años se tendrán \$60 000, siempre y cuando la tasa de interés sea de 34% con capitalización bimestral. En otras palabras, \$30 966.72 y \$60 000 son cantidades *equivalentes* a la tasa de 34% con capitalización de intereses cada bimestre, durante 12 periodos de capitalización.

También se puede decir que \$60 000 son el **valor futuro** de \$30 966.72, si la tasa de interés es de 34% anual capitalizando los intereses en 12 periodos bimestrales.

Ejemplo 5.9

Luis recibió una herencia de medio millón de pesos y quiere invertir una parte de este dinero en un fondo de retiro. Piensa jubilarse dentro de 27 años y para entonces desea tener \$20 000 000 en el fondo. ¿Qué parte de la herencia deberá invertir ahora si el dinero estará ganando una tasa de interés compuesto cada mes de 12.45% anual?

Solución

$F = \$20\,000\,000$

$i = 12.45\% \text{ anual} = \dfrac{12.45}{12}\% \text{ mensual}$

$n = (27)(12) = 324$ meses

$$P = \frac{20\,000\,000}{\left(1 + \dfrac{0.1245}{12}\right)^{324}} = \$705\,781.47$$

Ejemplo 5.10

En la compra de un automóvil, el señor Soto da un enganche de \$25 000 y acuerda pagar \$206 660.78 seis meses después (cantidad que incluye los intereses por el financiamiento). Si la tasa de interés es de 18% compuesto cada mes, encuentre el precio de contado del automóvil.

Solución

A los \$206 660.78 se deben descontar los intereses del financiamiento y a la cantidad resultante se le suma el anticipo. Es decir, el precio de contado del automóvil es el anticipo más el valor presente de \$206 660.78:

$$\text{Precio de contado del automóvil} = 25\,000 + \frac{206\,660.78}{\left(1 + \dfrac{0.18}{12}\right)^{6}} = \$214\,000$$

Ejemplo 5.11

Alejandro está vendiendo un terreno y recibe las siguientes ofertas:

- Daniel le ofrece $210 000 de contado.
- Armando le ofrece un anticipo de $100 000 y el saldo en dos pagarés de $71 430 cada uno a 6 y 10 meses de plazo.

Si Alejandro puede invertir al 1.2% mensual con capitalización mensual, ¿cuál alternativa le conviene más?

Solución

Para comparar las alternativas es necesario trasladar todas las cantidades al mismo instante. Aunque la fecha de comparación puede ser cualquiera, es usual tomar el tiempo presente, ya que es el momento en que se toma la decisión.

El valor presente de la primera alternativa es $210 000 y el valor presente de la segunda es:

$$VP = 100\,000 + \frac{71\,430}{(1 + 0.012)^{6}} + \frac{71\,430}{(1 + 0.012)^{10}} = \$229\,894.31$$

A Alejandro le conviene aceptar la oferta de Armando, ya que es $19 894.31 mayor que la oferta de Daniel en el momento actual. Es necesario tener en mente que una modificación en la tasa de interés y/o en el tiempo puede conducir a una decisión distinta.

Ejemplo 5.12

El 10 de marzo de 2010, el señor Aldo prestó al señor Cruz $75 000, cobrándole una tasa de interés de 28.44% con capitalización diaria. El señor Cruz firmó un pagaré con vencimiento al 10 de septiembre de 2010. El 18 de julio de 2010 el señor Aldo descontó el documento en un banco. ¿Cuánto dinero recibió el señor Aldo por el pagaré,

a) si se descontó con una tasa de descuento de 25.18% anual?
b) si se descontó con una tasa de interés de 25.18% capitalizable cada día?

Utilice el año comercial.

Solución

Para resolver el problema es necesario, en primer lugar, calcular el monto de la deuda o valor de vencimiento del pagaré, ya que el descuento se efectúa sobre dicho valor.

$$F = 75\,000\left(1 + \frac{0.2844}{360}\right)^{184} = \$86\,729.21$$

Observe que la tasa de interés se divide entre 360 para convertirla en tasa de interés diaria, ya que se trata del año comercial.

a) Al utilizar una tasa de descuento, se asume que el descuento es del tipo de descuento bancario; por tanto, se utiliza la ecuación (4.8) para obtener el valor efectivo:

$$VE = 86\,729.21\left[\left(1 - \frac{0.2518}{360}\right)(54)\right] = \$83\,453.45$$

b) En este caso se trata de descuento racional, por tal motivo el valor efectivo es el valor presente del documento.

$$VP = \frac{86729.21}{\left(1 + \frac{0.2518}{360}\right)^{54}} = \$83\,515.64$$

Ejemplo 5.13

¿A qué tasa de interés compuesto se deben depositar \$17 500 para disponer de \$20 000 en un plazo de 15 meses? Considere que los intereses se capitalizan cada quincena.

Solución

La solución se obtiene al despejar i de la ecuación (5.2), lo cual puede hacerse de dos formas distintas.

Método 1

$$F = P(1 + i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1 + i)^n$$

Obteniendo la raíz n-ésima de ambos lados de la igualdad:

$$\sqrt[n]{\frac{F}{P}} = 1 + i$$

Por tanto,

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

En este caso:

$P = \$17\,500$

$F = \$20\,000$

$n = 30$ quincenas

Al sustituir los valores numéricos:

$$i = \sqrt[30]{\frac{20\,000}{17500}} - 1$$

$$i = \sqrt[30]{1.142857143} - 1 = 0.004460967 = 0.4460967\% \text{ quincenal}$$

$$i = (0.4460967)(24) = 10.7063\% \text{ anual.}$$

Método 2

$$F = P(1 + i)^n$$

Al aplicar logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación anterior y utilizando las leyes de los logaritmos se obtiene

$$\log F = \log P + n \log(1 + i)$$

$$\log F - \log P = n \log(1 + i)$$

Por tanto,

$$\log(1 + i) = \frac{\log F - \log P}{n}$$

Al sustituir los valores numéricos en la expresión anterior se obtiene:

$$\log(1 + i) = \frac{\log\ 20\,000 - \log\ 17500}{30} = 0.0019330649$$

Por tanto:

$$1 + i = \text{antilog}\ 0.0019330649 = 10^{0.0019330649}$$

$$1 + i = 1.004460967$$

$$i = 0.004460967 = 0.4460967\% \text{ quincenal}$$

$$i = 10.7063\% \text{ anual.}$$

Ejemplo 5.14

Se desea duplicar un capital en un año. Si la capitalización se lleva a cabo cada semana, ¿a qué tasa de interés debe invertirse?

Solución

Sea x el capital inicial; por tanto, el valor futuro o monto compuesto será $2x$.

Si la capitalización de los intereses es semanal, en un año de inversión hay 52 capitalizaciones. Por tanto:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[52]{\frac{2x}{x}} - 1 = \sqrt[52]{2} - 1$$

$$i = 0.01341899 \text{ por semana} = 1.341899\% \text{ semanal} = 69.7788\% \text{ anual.}$$

Ejemplo 5.15

En el mes de enero de 2010 la renta diaria de películas en Blu-ray era de $28 en el video club Azteca. Durante el año la renta se incrementó al final de cada trimestre de la siguiente manera:

Trimestre	Porcentaje de incremento
1	7.14%
2	10.00%
3	4.55%
4	1.45%

a) Calcule la renta diaria de una película a principios de enero de 2011.

b) Calcule el porcentaje total de aumento en el año.

c) Calcule la tasa trimestral promedio de incremento en el precio de la renta.

Solución

a) Como se vio en los ejemplos 5.6 y 5.7, al tener tasas variables la fórmula (5.2) no se puede aplicar de forma única. El problema se puede resolver en partes, trimestre a trimestre, como se muestra en la siguiente tabla.

Trimestre	Renta al inicio del trimestre	Incremento al final del trimestre	Renta al final del trimestre
1	$28.00	$2.00	$30.00
2	$30.00	$3.00	$33.00
3	$33.00	$1.50	$34.50
4	$34.50	$0.50	$35.00

A principios de enero de 2011, la renta diaria de películas en Blu-ray costaba $35.00.

CAPÍTULO

9

Bonos y obligaciones

Nadie puede amasar una fortuna
sin hacer harina a los demás.
Manolito (de la tira cómica *Mafalda*)

Objetivos

Al concluir el estudio de este capítulo, usted podrá:

- Explicar qué son los bonos y las obligaciones.
- Plantear y resolver problemas de bonos y obligaciones.
- Calcular las tasas de rendimiento de los bonos y obligaciones.

9.1 Introducción

Mercado de dinero o *Mercado de deuda*, llamado así porque el emisor de los títulos se convierte en deudor ante el inversionista.

Una obligación o bono es una promesa de pago futuro que adquiere la entidad que lo emite, con los inversionistas que lo compran.

En el capítulo 4 se mencionó que el Mercado de valores es el mercado organizado para la compraventa de valores (inversiones financieras) y se divide en Mercado de dinero, Mercado de capitales y Mercados especializados.

Los bonos y las obligaciones pertenecen al mercado de dinero o mercado de deuda, como también se le conoce, y representan una importante fuente de financiamiento para las empresas privadas, públicas y gobierno.

Cuando una empresa privada o pública o un gobierno necesitan dinero para financiar sus proyectos a largo plazo, y la cantidad requerida es bastante cuantiosa, de tal manera que sería muy difícil obtenerla de un solo banco o inversionista, el problema se puede resolver emitiendo *obligaciones* o *bonos* que pueden ser adquiridos tanto por personas como por empresas. La empresa o gobierno emisor de las obligaciones o bonos recolectan el dinero proveniente de los inversionistas obligándose a pagarles un interés periódico y a reintegrar el capital al cabo de un cierto tiempo.

Las **obligaciones** o **bonos** se pueden definir como documentos o títulos de crédito a largo plazo, emitidos por una empresa privada o pública o por un gobierno que ganan intereses pagaderos a intervalos de tiempo perfectamente definidos.

Cuando los documentos son emitidos por una empresa privada, se les llama **obligaciones** o **bonos corporativos**; cuando los emite una institución gubernamental, reciben el nombre de **bonos**. Sin embargo, esta nomenclatura no es estricta.

De ahora en adelante se empleará únicamente el término genérico *bono* para referirse tanto a los bonos en sí, como a las obligaciones.

Los bonos se clasifican en **nominativos** y **al portador**. Son nominativos aquellos que tienen el nombre de su propietario, mientras que los bonos al portador no lo tienen.

Los bonos corporativos también se clasifican por el tipo de garantía que los respalda. Una **obligación fiduciaria** se refiere a aquella garantía que está constituida en un fideicomiso. La **obligación hipotecaria** es aquella que está garantizada con hipoteca sobre bienes propiedad de la empresa emisora. Una **obligación prendaria** es aquella que está garantizada por diversos bienes. La **obligación quirografaria** está garantizada por la buena reputación de la empresa emisora en cuanto a su cumplimiento con las obligaciones contraídas.

Antiguamente los bonos se emitían mediante un documento que iba acompañado de **cupones** para el pago de los intereses. Los cupones eran pagarés impresos en serie y unidos al bono, y cada uno tenía impresa su fecha de vencimiento. Para cobrar el interés ganado en determinado periodo, el tenedor del bono desprendía el cupón correspondiente y lo presentaba al banco para su cobro. En la actualidad, la mayoría de los bonos se representan por medio de registros virtuales y todas las transacciones se registran en forma electrónica. Sin embargo, a pesar de que los bonos ya no existen físicamente, se continúa usando la palabra *cupón* para indicar el interés que recibe el inversionista.

Algunos bonos no pagan intereses periódicamente, carecen de cupones; en este caso el interés generado se capitaliza y se paga el monto al vencimiento del bono.

También existen bonos que no pagan intereses en absoluto, debido a que se venden en una cantidad inferior a su valor nominal; es decir, se venden aplicando una tasa de descuento. Este tipo de bonos se llaman **bonos de cupón cero**.

Los Cetes, estudiados en el capítulo 4, pueden considerarse bonos de cupón cero.

También existen bonos, llamados **bonos perpetuos**, que pagan intereses periódicos a perpetuidad y el capital invertido en el bono nunca es devuelto al inversionista, ya que carecen de fecha de vencimiento.

Un bono perpetuo también se llama *bono no amortizable*.

Las partes esenciales de un bono son:

- **Fecha de emisión:** es aquella en la cual la empresa emisora coloca sus bonos en el mercado de valores.
- **Valor nominal:** es el valor marcado en el documento y constituye el capital que el inversionista inicial proporciona al emisor del mismo, excepto cuando el documento es colocado con descuento.
- **Valor de redención:** es la cantidad que el emisor del bono tendrá que entregar al tenedor (inversionista) del documento al concluir el plazo estipulado para la vigencia de la emisión, excepto cuando el bono es a perpetuidad.

Cuando el valor de redención es igual al valor nominal, se dice que el bono se *redime a la par*. Se tiene una emisión *bajo la par* o *con descuento* cuando el valor de redención es menor que el valor nominal. Cuando el valor de redención es mayor que el valor nominal, la emisión se redime *sobre la par* o *con premio*.

La redención de un bono se lleva a cabo en la **fecha de vencimiento**, llamada también **fecha de redención**, la cual está estipulada en el bono. Existen bonos, llamados **bonos reembolsables** que contienen una cláusula de **redención anticipada**, la cual permite al emisor redimir el bono antes de su fecha de vencimiento.

Las ventajas que logra el emisor al redimir anticipadamente un bono son varias. Por ejemplo, si las tasas de interés disminuyen, la cláusula de redención anticipada permite a la empresa emisora retirar los bonos que están en circulación en este momento, reemplazándolos por otros que paguen una tasa de interés más baja.

Es común que el tenedor de un bono lo transfiera (lo venda) a otro inversionista antes de la fecha de vencimiento. Cuando esto ocurre, el bono se puede transferir a *la par* (si el precio de compraventa del bono es igual al de redención), *bajo la par* (cuando el precio de compraventa es menor que el de redención) o *sobre la par* (si el precio de compraventa es mayor que el de redención).

Una ventaja al invertir en bonos es que no es necesario esperar hasta le fecha de vencimiento para recuperar la inversión, ya que se pueden vender antes en el mercado secundario.

- **Tasa de interés nominal:** es la tasa utilizada por el emisor del bono para el pago de los intereses; también se conoce como **tasa de cupón**.

Dependiendo de las características del mercado financiero, la tasa de interés puede ser:

- **Fija:** en este caso la tasa de interés no varía con respecto a las condiciones del mercado. La tasa es establecida en el momento de la emisión y está vigente durante la vida del bono. Este tipo de bonos protegen al inversionista contra una caída en las tasas de interés.
- **Variable:** en este caso los intereses son ajustados periódicamente para reflejar las condiciones del mercado prevalecientes en ese momento y están ligados a una tasa de referencia como pueden ser Cetes, TIIE, etc. Este bono protege al inversionista contra alzas en las tasas de interés.
- **Real:** el valor nominal se ajusta periódicamente con la inflación y sobre este valor ajustado se calculan los intereses con la tasa de cupón pactada al momento de la emisión. Este tipo de bono protege al inversionista contra la pérdida de poder adquisitivo de su inversión.

Ejemplo 9.1

¿Qué significa la expresión: *un bono con valor nominal de $100 se redime a 108*?

Solución

Significa que el valor de redención del bono será de 108% de su valor nominal. Esto es

$$108\% \text{ de } 100 = (1.08)(100) = \$108$$

En este caso el bono se redime con premio o *sobre la par*. También se puede decir que el bono se redime 8% más de su valor nominal.

Ejemplo 9.2

Los propietarios de una fábrica de ropa están planeando la expansión de su negocio. Por tal motivo emiten bonos corporativos con valor nominal de $100 cada uno, con la finalidad de financiar el proyecto de inversión. Los bonos vencerán a la par dentro de 10 años y pagarán un interés trimestral de 15% anual.

El señor Jiménez compró un bono en $90 a través de su agente de bolsa. ¿A qué pagos tiene derecho el señor Jiménez? ¿Cuál será el interés total que recibirá por su inversión?

Solución

El señor Jiménez recibirá \$100 en la fecha de vencimiento (o redención) del bono, dentro de 10 años. Además , durante 10 años, recibirá cada 3 meses el interés del cupón correspondiente, el cual tiene un valor de

$$I=(100)\left(\frac{0.15}{12}\right)(3)=\$3.75$$

El bono se compró con descuento (*bajo la par*), debido a que se pagó por él una cantidad inferior a su valor nominal. Esto hace que la rentabilidad de la inversión sea mayor a 15% anual.

Como en 10 años hay 40 periodos trimestrales, el interés total ganado por el inversionista es

$$(\$3.75/\text{cupón})(40\text{ cupones}) = \$150$$

Aunque en teoría es posible la compra de un solo bono, en la práctica existe un mínimo de compra. La cantidad mínima es establecida por cada casa de bolsa o institución bancaria.

Ejercicios 9.1

1. ¿Cuál es el objetivo de una empresa al emitir bonos?
2. ¿Qué es un cupón?
3. Cuando se dice que un bono con valor nominal de \$100 se redime a 98, ¿qué se indica con esto?
4. Calcule el valor de redención de un bono con valor nominal de \$500 que se redime a \$112.38.
5. ¿Cuál es el significado de la expresión: *Un bono con valor nominal de \$1 000 que se redime a la par se compra en 94*?
6. Determine el valor de vencimiento de un bono con valor nominal de \$500 que se redime:
   a) En 11% más de su valor nominal.
   b) En 8% menos de su valor nominal.
7. ¿Qué significa la expresión: *Un bono con valor nominal de \$500 se redime a la par*?
8. Calcule el interés que usted recibirá por periodo si compra un bono con valor nominal de 100 dólares y vencimiento a la par a 15 años, si el pago de los intereses es cada semestre a una tasa de cupón de 8.5% anual.

9. Se desea ampliar una fábrica de muebles. Para financiar el proyecto se emiten bonos corporativos con un valor nominal de \$500 cada uno, pagando intereses mensuales de 15.25% anual. Si el señor Pérez invierte en la compra de 1 100 bonos, ¿a qué pagos tiene derecho si la compra de los bonos y el vencimiento de los mismos es a la par?

10. ¿Cuál será el pago por intereses semestrales que recibirá la señora Hernández al comprar 2 500 bonos de \$100 de valor nominal, si la tasa de cupón es de 6.5% semestral?

11. ¿A qué pagos tiene derecho una persona que compró bonos de cupón cero, si los bonos vencen dentro de 10 años y su valor nominal es de 1 000 dólares cada uno?

12. ¿En cuánto se compra y cuál es el valor de vencimiento de un bono que se redime en \$108, tiene valor nominal de \$100 y se compra en \$95?

13. Calcule es el valor nominal y el interés semestral que recibirá el poseedor de un bono que se redime en \$115 al cabo de 5 años, sabiendo que la tasa de cupón es de 14% anual y el valor de redención es de \$287.50.

9.2 Valor presente de los bonos

Una característica importante de los bonos es que pueden negociarse en el mercado de valores; es decir, pueden ser comprados y vendidos en cualquier momento, antes de la fecha de redención, por personas diferentes al beneficiario original del bono.

El precio que pagará un inversionista interesado en la compra de los títulos, llamado **precio de mercado**, podrá ser *a la par*, cuando el precio de mercado sea igual al valor de redención; *sobre la par* (con premio), si se paga un precio superior al valor de redención; *bajo la par* (con descuento), si se paga un precio menor al valor de redención.

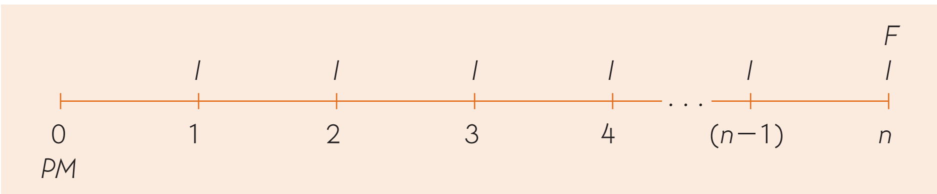
El precio que se fija para un bono depende, básicamente, de los siguientes factores:

- La tasa de interés del cupón
- La frecuencia de pago de los intereses del cupón
- La tasa de interés deseada por el inversionista
- El tipo de garantía del bono
- El valor de redención

- El tiempo que debe transcurrir hasta la fecha de redención
- La liquidez del bono
- La calificación del riesgo de insolvencia del emisor
- Las condiciones económicas prevalecientes en el país

Con base en los factores anteriores, un inversionista interesado en la compra de bonos debe determinar cuánto está dispuesto a pagar por ellos.

Si *PM* es el precio de mercado o precio de compra de un bono, *F* es el valor de redención e *I* es el interés que recibe el inversionista en forma periódica (interés del cupón), entonces se tiene el siguiente diagrama de tiempo.



Recuerde que si el bono se redime a la par, entonces el valor nominal es igual al valor de redención.

A partir del diagrama anterior, se ve que el precio a pagar por un bono (precio de mercado) se determina sumando el valor presente del valor de redención y el valor presente de los intereses periódicos, con base en una tasa de interés deseada por el inversionista, llamada **tasa de retorno** o **tasa de rendimiento** de la inversión, simbolizada por *r*. Esto es,

$$PM = F(1+r)^{-n} + I\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right] \tag{9.1}$$

El interés periódico que se obtiene por medio de los cupones se calcula mediante la fórmula del interés simple, utilizando como capital el **valor nominal** del bono.

En esta sección se resolverán ejemplos y ejercicios en los que la compraventa de bonos se lleva a cabo en una fecha de vencimiento de cupón, es decir, el día en que la emisora de los títulos paga los intereses correspondientes a un cupón.

Ejemplo 9.3

El señor Romo desea ganar 13% de interés capitalizable cada mes de una inversión en bonos corporativos. ¿Cuánto deberá pagar hoy por un bono que tiene un valor nominal de $1 000, paga intereses mensuales a una tasa de 11% anual y su redención será a la par dentro de 5 años?

Solución

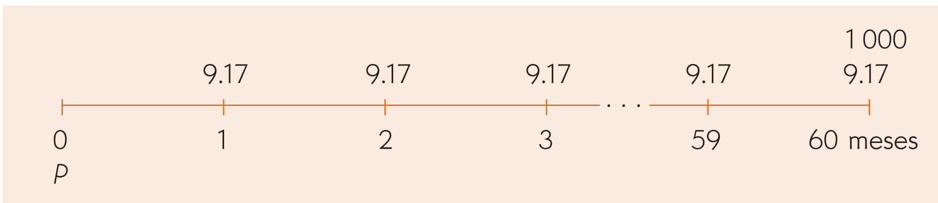
Al comprar los bonos, el señor Romo adquiere el derecho de recibir el pago mensual de los intereses y el valor de redención en la fecha de vencimiento.

El pago mensual que recibirá el señor Romo por concepto de intereses es:

$$I = (1000)\left(\frac{0.11}{12}\right)(1) = \$9.17 \text{ por cada bono}$$

Al cabo de 5 años, el valor de redención que recibirá es de $1 000 por bono.

Lo anterior se muestra en el siguiente diagrama de tiempo:



Como el señor Romo desea obtener un rendimiento de 13% capitalizable cada mes, el precio a pagar por el bono se obtiene al calcular el valor presente de los intereses mensuales, los cuales forman una anualidad vencida, más el valor presente del valor de redención (o vencimiento), ambos calculados a la tasa de 13% capitalizable cada mes.

$$PM = 1000\left(1+\frac{0.13}{12}\right)^{-60} + 9.17\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.13}{12}\right)^{-60}}{\left(\frac{0.13}{12}\right)}\right]$$

$$PM = \$926.90$$

Este tipo de bonos, con tasa de interés fija, se conoce como *bonos straight* o *bullet* y es el tipo más usual de bono que se emite.

El precio que deberá pagar el señor Romo por cada bono es de $926.90. Este precio no incluye los intereses del cupón que vence el día de la compraventa, ya que el interés de este cupón pertenece al vendedor del bono.

La ganancia obtenida por el inversionista por cada bono es de:

$$\text{Ganancia} = \$1\,000 + (\$9.17/\text{mes})\,(60 \text{ meses}) - \$926.90 = \$623.30$$

Ejemplo 9.4

Resuelva el ejemplo anterior si los bonos se redimen a 115.

Solución

Ya se mencionó que 115 significa que el valor de redención es 115% de su valor nominal, es decir, se tiene un valor de redención sobre la par.

El valor de redención de cada bono es:

$$F = (1.15)\,(1\,000) = \$1\ 150$$

El interés mensual que se obtiene es el mismo ($9.17 por cada bono), ya que su cálculo se basa en el valor nominal.

El precio de mercado del bono es:

$$PM = 1\,150\left(1+\frac{0.13}{12}\right)^{-60} + 9.17\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.13}{12}\right)^{-60}}{\left(\frac{0.13}{12}\right)}\right]$$

$$PM = \$1\,005.48$$

Ejemplo 9.5

Una empresa emite bonos con valor nominal de $100 cada uno, redimibles a la par a un plazo de 5 años. La tasa de cupón que ofrece es 12.8% anual pagadero cada trimestre. ¿Qué precio se debe pagar por cada bono si se adquieren un año antes del vencimiento y se desea un rendimiento de 15.6% capitalizable cada mes?

Solución

Antes de calcular el interés y el valor de mercado del bono, es necesario obtener la tasa equivalente capitalizable trimestralmente de la tasa de rendimiento deseada. Por la ecuación (5.3), se tiene que

$$I_{eq} = \left[\left(1+\frac{0.156}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right]4 = 15.8037\% \text{ anual capitalizable cada trimestre}$$

El interés trimestral de cada cupón es:

$$I = (100)\left(\frac{0.128}{4}\right)(1) = \$3.20$$

Por tanto, el valor de compra del bono es:

$$PM=100\left(1+\frac{0.158037}{4}\right)^{-4}+3.20\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.158037}{4}\right)^{-4}}{\left(\frac{0.158037}{4}\right)}\right]$$

$$PM=\$97.27$$

Ejemplo 9.6

Editorial Escorpión, S.A. emitió obligaciones por un total de \$6 000 000, las cuales devengan intereses trimestrales y vencen a la par dentro de 4 años. Calcule la tasa de cupón, si el valor de mercado de la emisión es de \$5 544 186 a la tasa de rendimiento de 15% capitalizable cada trimestre.

Solución

Para calcular la tasa de interés nominal que ofrece el emisor de las obligaciones, es necesario obtener primero el valor de los intereses devengados por los cupones.

Si I es el interés trimestral devengado por los cupones, entonces es posible formar la siguiente ecuación de valor

$$5544186=6000000\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{-16}+I\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{-16}}{\left(\frac{0.15}{4}\right)}\right]$$

$$5544186=3329212.865+11.87016504\,I$$

Por tanto,

$$I=186600$$

Si los intereses son por \$186 500, entonces

$$I=(6000000)\left(\frac{i}{4}\right)(1)=186\,600$$

donde i es la tasa de interés anual nominal.

Por tanto,

$$i=\frac{(186600)(4)}{6000000}$$

$$i=0.1244=12.44\%\text{ anual}$$

Ejemplo 9.7

Land Computer Co. ha emitido bonos corporativos con valor nominal de 1 000 dólares cada uno, redimibles a la par, a 10 años de plazo, y cupones semestrales con tasa de interés de 12% anual. Si los bonos pueden reembolsarse después de transcurridos 7 años, calcule el precio de compra para que produzcan un rendimiento de 14% anual capitalizable semestralmente.

Solución

En la sección 9.1 se mencionó que los *bonos reembolsables* son aquellos que contienen una cláusula de redención anticipada, la cual permite al emisor redimir el bono antes de su fecha de vencimiento.

Para determinar el precio de compra de un bono reembolsable, se deben calcular todos los precios de compra posibles que correspondan al rendimiento deseado por el inversionista y se paga el mínimo de ellos. En este caso se calcularán los precios de compra a la fecha de vencimiento y después de transcurridos 7 años.

El interés semestral de cada cupón es:

$$I=(1000)\left(\frac{0.12}{2}\right)(1)=60 \text{ dólares}$$

El precio de compra a la fecha de vencimiento es:

$$PM=1000\left(1+\frac{0.14}{2}\right)^{-20}+60\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.14}{2}\right)^{-20}}{\left(\frac{0.14}{2}\right)}\right]$$

$$PM=894.06 \text{ dólares}$$

El precio de compra después de transcurridos 7 años:

$$PM=1000\left(1+\frac{0.14}{2}\right)^{-14}+60\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.14}{2}\right)^{-14}}{\left(\frac{0.14}{2}\right)}\right]$$

$$PM=912.55 \text{ dólares}$$

En este caso, el precio a pagar por cada bono debe ser de 894.06 dólares. Al comprar el bono a este precio, el inversionista garantiza el rendimiento deseado, independientemente de si el bono se reembolsa o no a los 7 años.

Ejemplo 9.8

Una empresa necesita dinero para financiar un proyecto y sus directivos han pensado emitir bonos de cupón cero con valor nominal de $100 que vencen en 10 años. ¿Cuál debe ser el precio de compra del bono para que los inversionistas tengan un rendimiento de 15% anual capitalizable cada semestre?

Solución

Los bonos cupón cero se colocan entre los inversionistas utilizando una tasa de descuento. Normalmente, en los instrumentos financieros a plazo menor de un año, el descuento que se aplica es el descuento bancario, como en los Cetes.

En los bonos a largo plazo, el descuento que se lleva a cabo normalmente es el descuento de tipo racional. En este caso la tasa de descuento es igual a la tasa de rendimiento, y el precio del bono se calcula despejando *P* de la fórmula del interés compuesto. Esto es,

$$PM = P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{100}{\left(1+\frac{0.15}{2}\right)^{20}} = \$23.54$$

Ejemplo 9.9

El gobierno federal emite bonos perpetuos con valor nominal de $500, que pagan intereses semestrales a una tasa de cupón de 10% anual. ¿Cuál debe ser el valor del bono para obtener un rendimiento de 6% semestral?

Solución

El interés semestral de cada cupón será

$$I = (500)\left(\frac{0.10}{2}\right)(1) = \$25$$

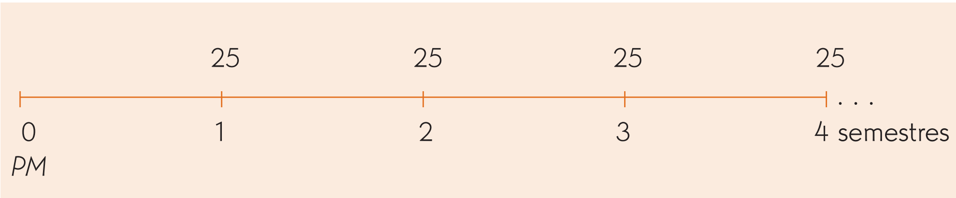
Solución I

Al ser el interés constante y por tiempo indefinido, se tiene una renta perpetua. Por tanto, por la ecuación (8.1) se obtiene

$$PM = P = \frac{A}{i} = \frac{25}{0.06} = \$416.67 \text{ por cada bono}$$

Solución 2

El diagrama de tiempo es



Al tomar como fecha focal el momento actual, se tiene la siguiente ecuación de valor:

$$PM = \frac{25}{1.06} + \frac{25}{(1.06)^2} + \frac{25}{(1.06)^3} + \frac{25}{(1.06)^4} + \dots$$

Factorizando,

$$PM = 25\left[\frac{1}{1.06} + \frac{1}{(1.06)^2} + \frac{1}{(1.06)^3} + \frac{1}{(1.06)^4} + \dots\right]$$

La expresión entre corchetes es una serie geométrica infinita con $r = \frac{1.02}{1.06}$ y $-1 < \frac{1.02}{1.06} < 1$. Por tanto, por la ecuación (3.5) se obtiene

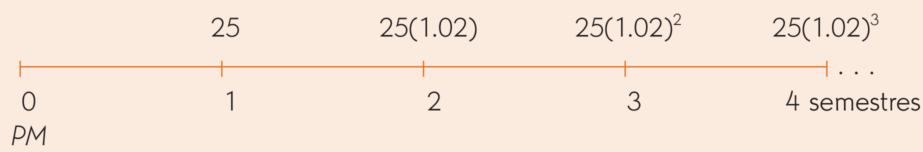
$$PM = 25\left[\frac{\frac{1}{1.06}}{1 - \frac{1}{1.06}}\right] = \$416.67 \text{ por cada bono}$$

Ejemplo 9.10

Resuelva el ejemplo anterior si el interés semestral crecerá por tiempo indefinido 2% cada semestre.

Solución

El diagrama de tiempo es:



Si se toma como fecha focal el momento actual, se obtiene

$$PM=\frac{25}{1.06}+\frac{25(1.02)}{(1.06)^2}+\frac{25(1.02)^2}{(1.06)^3}+\frac{25(1.02)^3}{(1.06)^4}+\ldots$$

Factorizando,

$$PM=\frac{25}{1.06}\left[1+\frac{(1.02)}{(1.06)}+\frac{(1.02)^2}{(1.06)^2}+\frac{(1.02)^3}{(1.06)^3}+\ldots\right]$$

La expresión entre corchetes es una serie geométrica infinita con $r=\frac{1.02}{1.06}$ y $-1<\frac{1.02}{1.06}<1$. Por tanto, por la ecuación (3.5) se obtiene

$$PM=\frac{25}{1.06}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1.02}{1.06}\right)}\right]=\$625 \text{ por cada bono}$$

Ejercicios 9.2

1. El gobierno de Estados Unidos es el mayor emisor de deuda del mundo. Los instrumentos de deuda de este gobierno son de la más alta calidad y, por tanto, son los de menor riesgo. Hay tres tipos de instrumentos del Tesoro de Estados Unidos, que se clasifican por nombre según su periodo de vencimiento al momento de la emisión:

   - **Bonos del Tesoro (T-Bonds).** Tienen un vencimiento a la par que varía entre 10 y 30 años y generalmente pago anual de cupones a tasa fija. Al vencimiento, el principal se devuelve en un solo pago.
   - **Pagarés del Tesoro (T-Notes).** Tienen una estructura idéntica a los T-Bonds, pero su vencimiento varía entre 1 y 10 años.
   - **Letras del Tesoro (T-Bills).** Son instrumentos emitidos con tasa de descuento y vencimiento a 12 meses o menos.

Una empresa invierte una parte del fondo de pensiones de sus empleados en T-Bonds con valor nominal de 1 000 dólares cada uno y 15 años de plazo, que vencen a la par y pagan un interés semestral de 8.75% anual.

a) ¿Qué cantidad recibirá la empresa cada semestre por concepto de intereses por cada bono comprado?

b) Si la empresa compró 3 810 bonos, ¿cuánto recibirá cada semestre por concepto de intereses?

c) ¿Qué cantidad de dinero recibirá la empresa en total en la fecha de vencimiento de los bonos?

2. Utilizando los datos del ejercicio anterior, ¿cuánto deberá pagar la empresa por cada bono si su rendimiento es de 9.8% anual capitalizable cada semestre?

3. La empresa Vientos Huracanados, S. A. construirá un parque eólico con 30 aerogeneradores, el cual tendrá una capacidad total de 180 Gigawatts al año. La inversión será de 100 millones de dólares, y una parte de ese dinero se obtendrá mediante la emisión de bonos a 20 años de plazo y valor nominal de $1 000 cada uno. Si los bonos se rediman a la par, pagan intereses trimestrales a una tasa de cupón de 10% anual y los inversionistas demandan un rendimiento de 11% anual capitalizable cada trimestre, ¿cuánto se deberá pagar por cada bono?

4. Antonio compra bonos de cupón cero, los cuales no pagan intereses periódicos, ya que son colocados con descuento entre los inversionistas. Si los bonos comprados por Antonio tienen un valor nominal de $500 y la tasa de descuento aplicada es de 10% anual capitalizable cada mes, ¿cuál es el precio a pagar por cada bono, sabiendo que vencen al cabo de 3 años?

5. Una empresa lanzará una emisión de bonos de cupón cero de 100 dólares de valor nominal con vencimiento a 8 años. La emisión se hará mediante una tasa de descuento de 8.64% anual capitalizable cada cuatrimestre. ¿A qué precio se deben emitir los bonos?

6. El señor Salinas compra un paquete de bonos de cupón cero en $148.25 por bono. El valor de vencimiento de los bonos es de $250. Si los bonos se rediman dentro de 4 años, calcule la tasa de descuento anual sabiendo que los intereses se capitalizan cada semestre.

7. Encuentre el precio a pagar por un bono con valor nominal de $100 que se redime a la par y fue colocado en el mercado de valores con cupones mensuales al 10% anual. El bono se compra a los dos años y medio antes de su vencimiento y se desea un rendimiento de 15% capitalizable cada mes. Calcule el interés mensual que recibirá un inversionista que compró 5 000 bonos y la ganancia total que se obtendrá por cada bono comprado.

8. Una empresa paraestatal desea colocar bonos con un valor nominal de \$1 000 entre los inversionistas del mercado de valores. ¿Qué precio puede pagarse por los bonos si serán redimidos en 12 años a 110, pagan intereses semestrales de 7% semestral y se desea obtener un rendimiento de 17.36% anual capitalizable cada mes? ¿La compra es bajo la par o sobre la par?

9. Un bono corporativo que paga intereses trimestrales de 15% anual es redimible a la par al cabo de 3 años. Si su valor nominal es de \$1 000, calcule el precio que debe pagarse por él
   a) si la tasa de interés vigente en el mercado es de 15% capitalizable cada trimestre.
   b) si la tasa de interés vigente en el mercado es de 20% capitalizable cada trimestre.
   c) si la tasa de interés vigente en el mercado es de 10% capitalizable cada trimestre.
   d) ¿Qué conclusiones obtiene a partir de los resultados anteriores?

10. Una empresa textil emitió bonos hace 5 años con valor nominal de 50€ cada uno y liquidables a 115, un plazo de redención de 15 años y tasa de interés fija de 8.12% anual pagadera cada semestre.
   a) ¿Cuál es el valor de redención?
   b) ¿Qué precio debe pagarse por cada obligación si hoy es el día de pago del décimo cupón y la tasa de rendimiento deseada es de 9.2% convertible cada semestre?

11. La empresa Mexicana de Televisión por Cable, S.A. lleva a cabo una emisión de 25 000 obligaciones con valor nominal de \$500 cada una y redimibles a la par. La empresa pagará los intereses mediante cupones semestrales de \$27.50 por cada obligación. Si la fecha de vencimiento es dentro de 10 años y la tasa de interés vigente en el mercado es de 9.75% capitalizable cada semestre, calcule
   a) la tasa de interés nominal (la tasa de interés que paga la empresa emisora).
   b) el precio de mercado de una obligación.
   c) la inversión hecha por una persona que recibe \$63 250 cada semestre por concepto de intereses.

12. Un inversionista compra bonos emitidos por el gobierno municipal de Zapopan, Jalisco, en \$952.85 cada uno. El valor nominal del bono es

de $1 000 y se redime en $112 al cabo de 5 años. Calcule la tasa de interés del cupón mensual, sabiendo que la tasa de rendimiento es de 13% capitalizable cada mes.

13. Tres años antes de la fecha de redención, el señor Robles invirtió $239 950 en comprar 1 000 bonos redimibles a la par. ¿Cuál es el valor nominal de cada bono si los cupones se cobran cada mes a una tasa de interés de 14.3% anual y la tasa de rendimiento es de 16% capitalizable cada mes?

14. Una obligación quirografaria de la empresa Salomon Industries por 1 000 dólares que devenga intereses de 9% anual vence el 15 de noviembre de 2017. El interés es pagadero los días 15 de marzo, 15 de julio y 15 de noviembre de cada año. Determine el precio de compra de una obligación de esta empresa para el 15 de julio de 2010, si la tasa de rendimiento deseada es de 10.365% capitalizable cada mes, sabiendo que la obligación se redime en 113.84.

15. Una empresa ha emitido bonos corporativos con valor nominal de $1 000 y vencimiento a la par a 15 años de plazo y con cupones trimestrales al 10% anual. Los bonos pueden reembolsarse a la par después de 10 años. Calcule el precio de compra para que se tenga un rendimiento de 12.5% capitalizable cada trimestre.

16. Resuelva el ejercicio 11 suponiendo que si el bono se reembolsa al cabo de 10 años, el valor de vencimiento será de $1 100. En caso de no reembolsarse, el bono se redime a la par.

17. Un bono con valor nominal de $5 000 que paga intereses mediante cupones semestrales a la tasa de 13.4% anual se redime a la par en 20 años. Es reembolsable a 105 en 10 años. Calcule el precio de mercado que garantiza un rendimiento de 15% capitalizable semestralmente.

18. Un bono corporativo de Tecnología Láser, S.A., con valor nominal de $300, se negocia en $280.49. ¿Qué tasa de interés están devengando los cupones mensuales, si la obligación se redime a la par dentro de 3 años y medio y se tiene una tasa de rendimiento de 15% capitalizable cada mes?

19. La empresa Harinas Finas, S. A. emite bonos perpetuos con valor nominal de $1 000 que pagan un cupón semestral de 13.5% anual. ¿Cuál debe ser el valor del bono para obtener un rendimiento de 15% anual capitalizable cada semestre?

20. Usted desea comprar bonos perpetuos de una fábrica de celdas de energía solar. Los bonos tienen un valor nominal de $500 cada uno y paga-

La matemática financiera se ha convertido en una disciplina fundamental, tanto a nivel personal como profesional, ya que proporciona los conceptos y las herramientas necesarias para entender y manejar el valor del dinero en el tiempo, y con ello comprender los aspectos financieros y comerciales del mundo moderno.

Este libro es útil para estudiantes de licenciatura y posgrado y profesionales en las áreas de finanzas, ingeniería financiera, economía, contaduría, banca, administración de empresas, actuaría, entre otras.

En esta quinta edición se mantiene la estructura general de la obra que ha caracterizado las anteriores. Sin embargo, se ha efectuado una revisión completa de todos los capítulos, incluyendo secciones nuevas, se han reescrito otras y se actualizan temas, ejemplos y ejercicios. Asimismo, se incorporan nuevos ejemplos, ejercicios y temas especiales.

Características de la quinta edición

- El capítulo 3, *Sucesiones y series* incluye ahora las sucesiones geométricas infinitas.
- Al final de cada capítulo se incluye un *Examen del capítulo*.
- Se revisaron y actualizaron todos los temas especiales y se agregaron nuevos: *Los logaritmos en la música, Pago mínimo en tarjeta de crédito, El costo anual total* (CAT) y *La fórmula de Baily.*
- La mayoría de las fórmulas utilizadas en el texto son demostradas. Esto tiene como objetivo que el lector entienda el fundamento y el alcance de las mismas, así como evitar que sean vistas como algo que aparece casi por arte de magia.
- En algunas secciones se dan referencias adicionales de sitios web para complementar lo mencionado en el texto.
- Se amplió el uso de la calculadora financiera *HP 17bII+* y de *MS Excel* y sus funciones financieras.
- Al final del libro se incorporan las soluciones de todos los ejercicios propuestos, así como un formulario muy completo.

ISBN-13: 978-607481715-7
ISBN-10: 607481715-4

9 786074 817157

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com